Glava 1

Z transformacija

1.1 Pojam z transformacije

U elektrotehnici se vrlo često susrećemo sa signalima koji su diskretnog tipa. To znači da je radimo sa signalima koji su zadati svoji vrednostima samo u diskretnim tačkama u vremenskom domenu. Ovakvi signali mogu biti originalno diskretnog tipa (dobijeni kao rezultat merenja) ili mogu biti rezultat odabira uzoraka neprekidnog signala u vremenskom domenu koji predstavlja neprekidnu funkciju.

Posmatrajmo neprekidnu funkciju $f(t)$ koja predstavlja neprekidan signal. Ukoliko izvršimo ravnomernu diskretizaciju ovog signala, tj. odabiramo vrednosti funkcije u jednakim vremenskim intervalima dužine T, diskretizovana funkcija predstavlja niz vrednosti $\{f(nT)\}_n$. Diskretnu funkciju ćemo označiti sa $f^*(t)$ i ona predstavlja niz brojeva. Sa δ označimo Dirakovu (impulsnu) funkciju $\delta(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{array} \right.$. Za Dirakovu funkciju važi da je

(i) $\delta(t - t_0) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{array} \right.$,

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$,

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a).$

Diskretnu funkciju možemo odrediti na sledeći način:

$$f^*(t) = f(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT).$$

Laplasova transformacija diskretne funkcije f^* će biti:

$$F^*(p) = L(f^*(t)) = \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT)e^{-pt}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\int_0^{\infty}\delta(t-nT)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)e^{-nTp}.$$

Uvedimo novu promenljivu z takvu da je $z = e^{Tp}$ t.j. $p = \frac{1}{T}\ln z$ i označimo $F^*(p)$ sa $F(z)$. Sada je

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}.$$

Dodatno primetimo da z transformacija ne zavisi od T, pa uvedimo uobičajnu notaciju $f(n)$. Period odabiranja vrednosti signala T predstavlja faktor slaliranja.

Kao što se definiše i dvostrana Laplasova transformacija (integralom od $-\infty$ do $+\infty$) za funkcije koje nisu kauzalne, tako uvodimo i dvostranu z transformaciju po indeksu niza koji prolazi skupom $\mathbb{Z}$ celih brojeva, kojom ćemo se na dalje i baviti.

Definicija 1.1. *Z transformacija niza $\{f(n)\}_n$ definisana je sa*

$$Z[f(n)] = F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^{-n} \tag{1.1}$$

pri čemu se pretpostavlja da ovaj red konvergira barem za jednu vrednost kompleksne promenljive z.

Z transformacija preslikava brojni niz $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ u kompleksnu funkciju $F(z)$. Z transformacija predstavlja analogon Laplasove transformacije, za diskretne vremenske signale.

1.2 Svojstva z transformacije

Sa $X(z)$ označili smo $Z[x(n)]$.

1. Linearnost. $Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \quad (a, b \in \mathbb{C})$
2. Vremensko pomeranje (kašnjenje). $Z[x(n - n_0)] = z^{-n_0}X(z)$
3. Sličnost (modulacija). $Z[z_0^n x(n)] = X\left(\dfrac{z}{z_0}\right), \quad (z_0 \in \mathbb{C})$
4. Vremenska inverzija. $Z[x(-n)] = X\left(\dfrac{1}{z}\right)$
5. Konjugovano kompleksni nizovi. $Z[\overline{x}(n)] = \overline{X}(\overline{z})$
6. Diferenciranje slike. $Z[nx(n)] = -z\dfrac{d}{dz}X(z)$
7. Početna vrednost. Za kauzalni niz $x(n)$ važi: $x(0) = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$.
8. Krajnja vrednost. Za kauzalni niz $x(n)$ i ukoliko se svi polovi kompleksne funkcije $X(z)(1-z^{-1})$ nalaze unutar kružnice $|z| = 1$, važi: $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$.
9. Proizvod originala: $Z\left(x(n)y(n)\right) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C X(\tau)Y\left(\dfrac{z}{\tau}\right)\dfrac{d\tau}{\tau}$, gde je C zatvorena kontura u zajedničkoj oblasti konvergencije posmatranih redova.
10. Konvolucija originala. $Z\left(x(n) * y(n)\right) = X(z)Y(z)$, gde je $x(n) * y(n) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$ konvolucija dva niza.
11. Parsevalova teorema. $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\overline{y}(k) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C X(z)\overline{Y}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\frac{dz}{z}$, gde je C zatvorena kontura u zajedničkoj oblasti konvergencije posmatranih redova.

12. Periodičnost niza. Ukoliko je niz $\{x(n)\}_n$ periodičan, tj. $x(0) = x(N)$, tada je
$$X(z) = \frac{X_1(z)}{1 - z^{-N}},$$
gde je $X_1(z)$ z transformacija niza $x(0), \ldots, x(N-1)$.

1.3 Inverzna z transformacija

Teorema 1.1. Neka je data funkcija $X(z)$ regularna u prstenu $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z| < R\}$, $(0 \leq r < R \leq +\infty)$ Tada postoji jedinstven niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ takav da je $Z[x(n)] = X(z)$, čiji je opšti član
$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_l \frac{X(z)}{z^{1-n}}\, dz,$$
gde je l bilo koja kontura koja obuhvata koordinatni početak i sadržana je u prstenu P.

Dokaz. Na osnovu pretpostavki tvrđenja teoreme ispunjene su pretpostavke postojanja Loranovog reda funkcije $X(z)$ za sve take $z \in P$, tj. funkcija $X(z)$ može se predstaviti Loranovim redom
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \tag{1.2}$$
pri čemu su koeficijenti c_n Loranovog reda jedinstveno određeni sa
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_l \frac{X(z)}{z^{n+1}}\, dz. \tag{1.3}$$
Ako uvedemo smenu $n = -k$ u (1.2) dobijamo da je
$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{-k} z^{-k},$$
odakle sledi da je
$$x(k) = c_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_l \frac{X(z)}{z^{-k+1}}\, dz.$$

Iz jedinstvenosti koeficijenata Loranovog reda sledi da su i članovi niza $x(n)$ jedinstveno određeni.

Napomena. Na osnovu prethodne teoreme možemo izvesti sledeće zaključke:

1. Na osnovu Košijeve teoreme o rezidumima, imamo da je

$$x(n) = \sum_{k=1}^{m} Res(X(z); z_k), \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

   gde su z_k singulariteti funkcije $X(z)$ koji se nalaze unutar prstena P.

2. Teorema 1.1 daje dovoljne uslove da bi funkcija $X(z)$ bila z transformacija nekog niza. S druge strane, ukoliko funkcija $X(z)$ nije regularna u nekom prstenu P, tada ona ne može biti z transformacija.

3. Članove niza $x(n)$ čija je z transformacija data funkcija $X(z)$ možemo odrediti razvojem funkcije $X(z)$ u Loranov red u okolini tačke $z = 0$ i zapisom u obliku $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$.

Zadaci

1. Odrediti z transformaciju niza

$$x(n) = \begin{cases} -e^{-an}, & n < 0 \\ e^{-bn}, & n \neq 0 \end{cases}, \qquad (-\infty < a < b < +\infty).$$

Rešenje. Z transformacija ovog niza je

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-e^{-an}\right) z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-bn} z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} e^{an} z^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-bn} z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{a} z)^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-b} z^{-1})^{n} = \frac{-e^{a} z}{1 - e^{a} z} + \frac{1}{1 - e^{-b} z^{-1}}$$

$$= \frac{e^b z}{e^b z - 1} - \frac{e^a z}{1 - e^a z}.$$

Ovo važi samo u slučaju kada je $|e^a z| < 1$ i $|e^{-b} z - 1| < 1$, tj. $r = e^{-b} < |z| < e^{-1} = R$, pa mora biti ispunjeno $e^a < e^b$.

2. Odrediti z transformaciju nizova:

a) $x(n) = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{Z}^- \\ a^n, & n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$,

b) $x(n) = \begin{cases} -a^n, & n \in \mathbb{Z}^- \\ 0, & n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$,

pri čemu je $a \in \mathbb{C}$ kompleksan broj.

Rešenje.

a) Z transformacija ovog niza je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a z^{-1}\right)^n.$$

Da bi ovaj niz konvergirao potrebno je da $|az^{-1}| < 1$, tj. $|z| > |a|$ i u tom slučaju važi da je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad (|z| > |a|)$$

b) Z transformacija ovog niza je

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} z^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a^{-1} z\right)^n.$$

Da bi ovaj niz konvergirao potrebno je da $|a^{-1}z| < 1$, tj. $|z| < |a|$ i u tom slučaju važi da je

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{z}{z - a}, \quad (|z| < |a|)$$

3. Odrediti z transformaciju niza $x(n) = \begin{cases} 2^{-n} + 3^{-n}, & n \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$.

Rešenje. Z transformacija ovog niza je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(2^{-n} + 3^{-n}\right) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2z)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (3z)^{-n}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3z}} = \frac{z(12z-5)}{(2z-1)(3z-1)}.$$

Da bi ovaj niz konvergirao potrebno je da $|(2z)^{-1}| < 1$ i $|(3z)^{-1}| < 1$, tj. $|z| > \frac{1}{2}$.

4. Ispitati da li postoji niz $x(n)$ čija je z transformacija funkcija $X(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 4z + 3}$, i ako postoji, odrediti ga u zavisnosti od položaja tačke z.

Rešenje.

i) $|z| > 3: \quad x(n) = \begin{cases} 0 & , \quad n \leq 0 \\ 2 \cdot 3^{n-1} - 1 & , \quad n > 0 \end{cases}$

ii) $1 < |z| < 3: \quad x(n) = \begin{cases} -2 \cdot 3^{n-1} & , \quad n \leq 0 \\ -1 & , \quad n > 0 \end{cases}$

iii) $|z| < 1: \quad x(n) = \begin{cases} -2 \cdot 3^{n-1} + 1 & , \quad n \leq 0 \\ 0 & , \quad n > 0 \end{cases}$

5. Ispitati da li postoji niz $x(n)$ čija je z transformacija funkcija $X(z) = \dfrac{z^2 - 5z + 6}{z^2 + 1}$, i ako postoji, odrediti ga u zavisnosti od položaja tačke z.

Rešenje.

i) $|z| < 1: \quad x(n) = \begin{cases} 1 + 5 \cdot (-1)^n z^{-2n-1} & , \quad n \leq -1 \\ 1 + 5 \cdot (-1)^n z^{-2n} & , \quad n \leq 0 \\ 0 & , \quad k > 0 \end{cases}$

$$\text{ii) } |z| > 1: \quad x(n) = \begin{cases} 1 + 5\cdot(-1)^{n-1} z^{-2n-1} & , \quad n \geq 0 \\ 1 + 5\cdot(-1)^{n-1} z^{-2n} & , \quad n \geq 1 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases}$$

6. Ispitati da li postoji niz $x(n)$ čija je z transformacija funkcija $X(z) = \ln(1 + az^{-1})$, i ako postoji, odrediti ga za $|z| > |a|$.

Rešenje. Kako je $|az^{-1}| < 1$, funkciju $X(z)$ možemo razvirti u Tejlorov red u okolini nule:

$$\ln(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(az^{-1})^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}a^n}{n} z^{-n}.$$

Odavde direktono dobijamo da je $x(n) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}a^n}{n}, & n \in \mathbb{N} \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_0^- \end{cases}$.

7. Koristeći z transformaciju rešiti diferencnu jednačinu:

$$x(n+2) - 3x(n+1) + 2x(n) = 0, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x(n) = 0, n < 0.$$

Rešenje. Delujemo z transformacijom na diferencnu jednačinu. Z transformacija je linearna, pa važi jednačina:

$$Z(x(n+2)) - 3Z(x(n+1)) + 2Z(x(n)) = Z(0).$$

Predstavimo sve izraze z transformacijom niza $x(n)$, $X(z) = Z(x(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$, imajući u vidu početne uslove diferencne jednačine.

$$Z(x(n+1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n+1)z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)z^{-n+1} = z\sum_{n=1}^{+\infty} x(n)z^{-n} =$$

$$= z\sum_{n=1}^{+\infty} x(n)z^{-n} + zx(0) - zx(0) = z\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = zX(z).$$

$$Z(x(n+2)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n+2)z^{-n} = \sum_{n=2}^{+\infty} x(n)z^{-n+2} = z^2\sum_{n=2}^{+\infty} x(n)z^{-n} =$$

$$= z^2 \left(\sum_{n=2}^{+\infty} x(n) z^{-n} + z^{-1} x(1) + x(0) - z^{-1} x(1) - x(0) \right)$$

$$= z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} - z = z^2 X(z) - z.$$

Sada jednačina postaje:

$$z^2 X(z) - z - 3z X(z) + 2X(z) = 0$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Kada primenimo inverznu z transformaciju na funkciju $X(z)$ dobićemo niz $x(n)$ koji je rešenje početne diferencne jednačine. Niz $x(n)$ definisan diferencnom jednačinom jednak je nuli za negativne indekse n, pa će oblast konvergencije z trasformacije biti $\frac{2}{|z|} < 1$, tj. $|z| > 2$. U ovoj oblasti konvergencije funkciju $X(z)$ možemo razviti u red, i dobijamo sledeći izraz:

$$X(z) = \frac{2}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^{-n} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1} z^{-n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n z^{-n} - \sum_{n=1}^{+\infty} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (2^n - 1) z^{-n}.$$

Dakle, rešenje diferencne jednačine je niz $x(n) = \left\{ \begin{array}{rl} 2^n - 1, & n \in \mathbb{N} \\ 0, & n \in \mathbb{Z}_0^- \end{array} \right.$.