Uzimajući tačku $x = \frac{\pi}{4}$, dobijamo da je $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{16k^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

3. Funkciju $f(x) = \sin x \ln\cos\frac{x}{2}$ predstaviti trigonometrijskim Fourierovim redom na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rezultat. $f(x) = \left(\frac{1}{4} - \ln 2\right)\sin x + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}\sin nx$.

4. Funkciju $f(x) = x^2 \sin x$ predstaviti kosinusnim Fourierovim redom na intervalu $(0, \pi)$.

Rezultat. $b_n = 0$, $a_0 = 2\pi - \frac{8}{\pi}$, $a_1 = -\frac{\pi}{2}$, a za $n > 1$ imamo da je $a_n = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{(n^2-1)^3} - 2\pi\frac{(-1)^n}{n^2-1} - \frac{12n^2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{(n^2-1)^3}$.

2.2 Fourierov integral i transformacija

Postavlja se pitanje šta se događa sa Fourierovim redom ako pustimo da $l \to +\infty$. Posmatrajmo neprekidnu funkciju $f(x)$ koja je apsolutno integrabilna na $\mathbf{R}$, to jest, integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < M < +\infty$ konvergira. Neka je $l > 0$, proizvoljno odabrano. Posmatrajmo funkciju $f(x)$, definisanu na intervalu $[-l, l]$ i periodično je produžimo. Tada se ona može predstaviti Fourierovim redom (1), odnosno

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt\right)\cos\frac{n\pi x}{l} + \left(\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}\,dt$$

Neka je $u_n = \frac{n\pi}{l}$. Imamo da je $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}$, te dobijamo da je

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta u_n\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos u_n(t-x)\,dt. \tag{6}$$

Kako $\left|\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}|f(t)|\,dt \leq \frac{M}{2l} \to 0$, kada $l \to +\infty$ i kako suma na desnoj strani jednakosti (6) predstavlja integralnu sumu funkcije $\varphi(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$, puštajući u (6) da $l \to +\infty$, dobijamo da suma konvergira ka integralu

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt. \tag{7}$$

Koristeći adicionu formulu $\cos u(t-x) = \cos ut \cos ux + \sin ut \sin ux$ dobijamo da je integral (7) moguće predstaviti u obliku

$$\int\limits_{0}^{+\infty} (a(u)\cos ux + b(u)\sin ux)\,du, \tag{8}$$

gde je

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt \quad \text{i} \quad b(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt. \tag{9}$$

Definicija 2. Neka je $f(x)$ apsolutno integrabilna funkcija na celom skupu $\mathbf{R}$. Integralom (7), odnosno (8) definišemo FOURIER*ov integral*, pri čemu su sa (9) definisani koeficijenti ovog integrala.

Ukoliko je funkcija $f(x)$ neprekidna zajedno sa izvodnom funkcijom $f'(x)$, FOURIERov integral konvergira ka vrednosti funkcije. Kao i FOURIERov red, FOURIERov integral, deo po deo neprekidne funkcije, konvergira ka $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Napomena. Može se zaključiti da FOURIERov integral neparne funkcije ima oblik

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} F_s(u)\sin ux\,du, \quad \text{gde je} \quad F_s(u) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt. \tag{10}$$

Sa $F_s(u)$ je označen koeficijent $b(u)$ i nazivamo ga koeficijentom sinusnog FOURIERovog integrala.

Ukoliko je funkcija $f(x)$ parna, njen Fourierov integral ima oblik

$$(11) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(u)\cos ux\,du, \quad \text{gde je} \quad F_c(u) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt.$$

Sa $F_c(u)$ je označen koeficijent $a(u)$ i nazivamo ga koeficijentom kosinusnog Fourierovog integrala. Oznake $F_s(u)$ i $F_c(u)$ uvodimo kako bi imali oznake koje odgovaraju narednom delu teksta.

Kompleksan oblik Fourierovog integrala. Kako je funkcija $\varphi(u)$ parna po promenljivoj u, tada je Fourierov integral moguće predstaviti u obliku

$$(12) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt.$$

S druge strane, zbog neparnosti sinusne funkcije, imamo da je

$$(13) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin u(t-x)\,dt.$$

Sabiranjem (12), sa (13) pomnoženim sa $-i$, dobijamo da je

$$(14) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\,du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}\,dt.$$

Fourierovu transformaciju funkcije $f(x)$ označavamo sa $F(u)$ i definišemo integralom

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}\,dt.$$

Iz jednakosti (14) dobijamo da je inverzna Fourierova transformacija definisana sa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{iux}\,du.$$

Za FOURIERove integrale važi PARSEVALova jednakost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2\,du. \tag{15}$$

Specijalno, za sinusni i kosinusni FOURIERov integral, važe PARSEVALove jednakosti

$$\int_{0}^{+\infty} (f(x))^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} (F_s(u))^2\,du \quad \text{i} \quad \int_{0}^{+\infty} (f(x))^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} (F_c(u))^2\,du.$$

Zadaci

10. Funkciju $f(x) = \operatorname{sgn}\,(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b)$ gde je $(b > a)$ predstaviti FOURIERovim integralom, a zatim primenjujući dobijeni rezultat izračunati vrednost integrala $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$.

Rešenje. Kako je $f(x) = 2$, za $x \in (a,b)$, a u ostalim tačkama funkcija je jednaka nuli, imamo da je

$$a(u)+ib(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos ux + i\sin ux)du = 2\int_a^b e^{iux}dx = \frac{2}{iu}(e^{ibu}-e^{iau}).$$

Razdvajanjem realnog i imaginarnog dela dobijamo koeficijente FOURIERovog integrala

$$a(u) = \frac{2}{u}(\sin bu - \sin au), \quad b(u) = -\frac{2}{u}(\cos bu - \cos au).$$

Primenom adicionih formula za sinus razlike, dobijamo FOURIERov integral polazne funkcije

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x-a)u - \sin(x-b)u}{u}du.$$

Kako, po DIRICHLETovoj teoremi u tački $x = b$ integral konvergira ka poluzbiru leve i desne vrednosti fukcije, tačnije ka 1 tada za $x = b$ dobijamo da je $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(b-a)u}{u}du = 1$, odakle smenom $(b-a)u = 2t$, dobijamo da je vrednost traženog integrala $\frac{\pi}{2}$.

11. Funkciju $f(x) = e^{-a|x|}$ $(a > 0)$, predstaviti FOURIERovim integralom, a zatim koristeći dobijeni rezultat izračunati vrednost integrala $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2+x^2}$.

Rešenje. Kako je funkcija $f(x)$ parna tada je $b(u) = 0$. Imamo da je

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-at} \cos ut\, dt.$$

Nakon dve primene parcijalne integracije, vraćamo se na polazni integral i dobijamo da je

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2+u^2},$$

te kako je funkcija neprekidno diferencijabilna, imamo da je

$$f(x) = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{a^2+u^2}\, du,$$

što predstalja FOURIERov integral funkcije f. Kako integral konvergira ka vrednosti funkcije u tački $x = a$, dobijamo da je

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos au}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi e^{-a^2}}{2a}.$$

12. Funkciju $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$, predstaviti FOURIERovim integralom, a zatim izračunati vrednost integrala

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \cos\frac{x}{2}\, dx \quad \text{i} \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{(x\cos x - \sin x)^2}{x^6}\, dx.$$

Rešenje. Kako je funkcija parna imamo da je $b(u) = 0$. Parcijalnom integracijom dobijamo da je

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2) \cos ut\, dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\sin u}{u^3} - \frac{4\cos u}{u^2}\right).$$

Zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$, primenjujući FOURIERov integral, dobijamo da je

$$f(x) = -\frac{4}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u\cos u - \sin u}{u^3} \cos ux\, du.$$

Uzimajući da je $x = \frac{1}{2}$ dobijamo da je

$$\int_0^{+\infty} \frac{u\cos u - \sin u}{u^3} \cos\frac{u}{2}\, du = -\frac{3\pi}{16}$$

Primenjujući PARSEVALovu jednakost za kosinusni FOURIERov integral, dobijamo da je

$$\int_0^{+\infty} \frac{(u\cos u - \sin u)^2}{u^6}\, du = \frac{\pi}{16} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\, dx = \frac{\pi^2}{15}.$$

13. Dokazati jednakost

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2zx\, dz = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1) \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Rešenje. Pokazaćemo da integral na levoj strani jednkosti iz iskaza zadatka predstavlja kosinusni FOURIERov integral funkcije na desnoj strani jednakosti. U tom cilju dopunimo funkciju sa desne strane jednakosti do parne, pomoću

$$g^*(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1) \\ x+1, & x \in (-1,0] \\ 0, & x \in (-\infty,-1] \cup x \in [1,+\infty) \end{cases}.$$

Kako je funkcija g^* parna, imamo da je $b(u) = 0$, dok je

$$a(u) = 2\int_0^1 (1-t)\cos ut\, dt = \frac{2}{u^2}(1-\cos u).$$

Kako funkcija zadovoljava DIRICHLETove uslove, imamo da je

$$g^*(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} \cos ux\, du.$$

Uvodeći smenu $u = 2z$ i koristeći adicionu formulu $1 - \cos 2z = 2\sin^2 z$ dobijamo da je

$$g^*(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2zx\, dz.$$

14. Primenjujući FOURIERovu transformaciju, rešiti integralnu jednačinu

$$\int_0^{+\infty} f(t) \sin ut\, dt = \begin{cases} 1-u, & u \in [0,1] \\ 0, & u > 1 \end{cases}.$$

Rešenje. Funkcija na desnoj strani integralne jednačine predstavlja sinusnu FOURIERovu transformaciju nepoznate funkcije $f(x)$, te iz jednakosti (10) sledi da je

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} F_s(u)\sin ux\,du = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}(1-u)\sin ux\,du = \frac{2(x-\sin x)}{\pi x^2}.$$

15. Odrediti FOURIERov integral funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$, za $a \neq 0$, a zatim primenjujući FOURIERovu transformaciju, odrediti

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ua \cos ux}{u}\,du.$$

Rešenje. Odredimo FOURIERov integral u kompleksnom obliku. Imamo da je

$$F(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}\,dt = \int\limits_{-a}^{a} e^{-iut}\,dt = \frac{e^{iua}-e^{-iua}}{iu} = 2\frac{\sin ua}{u}, \text{ za } u \neq 0.$$

Za $u = 0$ dobijamo da je $F(u) = 2a$. FOURIERov integral $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{iux}\,du$, konvergira ka funkciji

$$f^*(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ \frac{1}{2}, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases},$$

pri čemu je vrednost funkcije u $|x| = a$ dobijena DIRICHLETovim kriterijumom. Rastavljanjem realnog i imaginarnog dela, dobijamo da je

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{iux}\,du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ua \cos ux}{u}\,du + \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ua \sin ux}{u}\,du.$$

Kako je podinetegralna funkcija u drugom integralu neparna, taj integral je nula, te dobijamo da je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ua \cos ux}{u}\,du = \begin{cases} \pi, & |x| < a \\ \frac{\pi}{2}, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Zadaci za vežbu

5. Funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, za $a \neq 0$, predstaviti FOURIERovim integralom.

Rezultat. $a(u) = \pi \frac{e^{-|a|u}}{|a|}$, $b(u) = 0$. Primeniti kompleksnu integraciju po polovini kruga za nalaženje koeficijenata.

6. Funkcije

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = e^{-a|x|} \cos bx, \text{ gde je } a > 0$$

predstaviti FOURIERovim integralom.

Rezultat.
a) $\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(1-\cos u)\cos ux}{u^2}\, du$ b) $\frac{a}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(u-b)^2+a^2} + \frac{1}{(u+b)^2+a^2} \right) \cos ux\, du.$

7. Odrediti sinusni FOURIERov integral funkcije $f(x) = e^{-ax}$ za $a > 0$ koji konvergira na $(0, +\infty)$ ka funkciji $f(x)$.

Rezultat. $b(u) = \frac{2}{\pi} \frac{u}{u^2+a^2}$.

8. Odrediti kosinusni FOURIERov integral funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ koji konvergira na $(0, +\infty)$ ka funkciji $f(x)$.

Rezultat. $a(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$.

9. Primenjujući FOURIERovu transformaciju, rešiti integralne jednačine

$$\text{a) } \int\limits_0^{+\infty} g(u) \cos xu\, du = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{b) } \int\limits_0^{+\infty} g(u) \sin xu\, du = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & x \geq \pi \end{cases},$$

gde je $g(u)$ nepoznata funkcija.

Rezultat. a) $g(u) = e^{-u}$, b) $g(u) = \frac{\sin \pi u}{1-u^2}$.